NILAI DAN VEKTOR EIGEN
MATRIKS INTERVAL ATAS ALJABAR MAX-PLUS

Dwi Suci Maharani[1] dan Suryoto[2]
[1, 2]Jurusan Matematika FMIPA Universitas Diponegoro
Jln. Prof. H. Soedarto, S.H., Tembalang, Semarang

Abstract. An interval matrix $\mathbf{A} = \langle \underline{A}, \overline{A} \rangle$ with given $\underline{A}, \overline{A} \in R_{\max}^{n \times n}$ and $\underline{A} \le \overline{A}$ is the set of all matrices A such that $\underline{A} \le A \le \overline{A}$. Eigenvalue and eigenvector of $A \in \mathbf{A}$ is called possible eigenvalue and eigenvector of an interval matrix **A**. With the definitions eigenvalue and interval matrix over max-plus algebra, can be developed a algorithm "possible eigenvector" to test whether a given vector x is a possible eigenvector of that interval matrix. Whereas universal eigenvalue and eigenvector of an matrix **A** is the eigenvalue and eigenvector of each $A \in \mathbf{A}$. Universal eigenvector with $\lambda = 0$ can be found by solving two-sided systems of linear equations over max-plus algebra.

Keywords: Interval matrices, max-plus algebra, possible eigenvector, universal eigenvector.

1. PENDAHULUAN

Aljabar max-plus yang dinotasikan dengan $R_{\max} = (R_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ merupakan salah satu struktur dalam aljabar yaitu semifield komutatif idempoten [1], dengan R_ε merupakan himpunan semua bilangan riil R dengan $\varepsilon = -\infty$, sedangkan operasi $\oplus$ *dan* $\otimes$ berturut-turut menyatakan maksimal dan penjumlahan normal bilangan riil, yang didefinisikan sebagai berikut [5]:

$\forall a, b \in R_\varepsilon$

$$a \oplus b = \max\{a, b\}$$

$$a \otimes b = a + b$$

Suatu sistem persamaan

$$x_i(k+1) = \max\{a_{i1} + x_1(k), a_{i2} + x_2(k), \cdots, a_{in} + x_n(k)\}$$

$i = 1,2,\cdots,n$; $k = 0,1,2,\cdots$; $x_i(k), a_{ij} \in R_\varepsilon$

dalam aljabar max-plus dapat dinotasikan dengan

$$x_i(k+1) = (a_{i1} \otimes x_1(k)) \oplus (a_{i2} \otimes x_2(k)) \oplus \cdots \oplus (a_{in} \otimes x_n(k))$$

$$= \bigoplus_{j=1}^{n} \left(a_{ij} \otimes x_j(k)\right) \qquad ; k = 0,1,2,\cdots$$

yang akhirnya dapat digabungkan secara kompak dengan penulisan

$$x(k+1) = A \otimes x(k)$$

di mana

$$x(k) = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{pmatrix} \in R_{\max}^n, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in R_{\max}^{n \times n}$$

Suatu skalar $\lambda \in R_\varepsilon$ dan vektor $x \ne \varepsilon \in R_{\max}^n$ berturut-turut dinamakan nilai eigen dan vektor eigen matriks $A \in R_{\max}^{n \times n}$ jika $A \otimes x = \lambda \otimes x$. Jika A adalah matriks dari digraph $G(A)$ yang terhubung kuat, maka A mempunyai nilai eigen yang tunggal $\lambda(A)$ yaitu

$$\lambda(A) = \max\left\{\frac{w(\rho)}{w(\rho)}; \rho \text{ } adalah \text{ } cycle \text{ } dari \text{ } G(A)\right\}$$

Di mana untuk cycle $\rho = \{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ bobotnya $w(\rho) = a_{i_1 i_2} \otimes a_{i_2 i_3} \otimes \cdots \otimes a_{i_k i_1}$ dan panjang lintasannya $l(\rho) = k$ [1].

Selanjutnya, jika setiap entri matriks $A \in R_{\max}^{n \times n}$ digandakan dengan $-\lambda(A)$, maka diperoleh suatu matriks B dengan $\lambda(B) = 0$. Sehingga, terdapat matriks $\Gamma(B) = B \oplus B^2 \oplus \ldots \oplus B^n$ yang mempunyai beberapa entri diagonal utamanya sama dengan 0. Kolom-kolom yang memuat entri tersebut disebut vektor eigen-vektor eigen fundamental dari matriks B dan A [2]. Selanjutnya, semua vektor eigen matriks B dan A dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier atas aljabar max-plus dari himpunan m vektor eigen fundamental $(m < n)$ yang diperoleh.

Bila matriks A diatas adalah matriks interval $\mathbf{A} = \langle \underline{A}, \overline{A} \rangle$ dengan $\underline{A}, \overline{A} \in R_{\max}^{n \times n}$ dan $\underline{A} \leq \overline{A}$ yang berarti setiap entri-entri yang bersesuaian berlaku $\underline{a}_{ij} \leq \overline{a}_{ij}$. Dengan mengasumsikan bahwa digraph dari semua matriks $A \in \mathbf{A}$ adalah terhubung kuat dengan entri-entrinya berhingga, dan oleh kerenanya masing-masing $A \in \mathbf{A}$ mempunyai nilai eigen yang tunggal $\lambda(A)$, berikut akan dibahas mengenai nilai dan vektor eigen yang mungkin maupun nilai dan vektor eigen universal dari matriks interval $\mathbf{A}$ atas aljabar max-plus.

2. MATRIKS INTERVAL ATAS ALJABAR MAX-PLUS

Matriks interval merupakan matriks yang elemen-elemen di dalamnya berupa interval tertutup dengan satu matriks batas bawah dan satu matriks batas atas sebagai penyusunnya.

Diberikan matriks $\underline{A} = (\underline{a}_{ij})$ dan $\overline{A} = (\overline{a}_{ij}) \in R_{\max}^{n \times n}$ sedemikian sehingga $\underline{a}_{ij} \leq \overline{a}_{ij}$ dengan $i, j = 1, 2, \cdots, n$.

Matriks interval atas aljabar max-plus berordo n didefinisikan dengan

$$\mathbf{A} = \langle \underline{A}, \overline{A} \rangle = \left\{ A = (a_{ij}) \middle| \underline{a}_{ij} \leq a_{ij} \leq \overline{a}_{ij}; i, j = 1, 2, \ldots, n \right\} \text{ [6]}$$

Contoh 1

Diberikan suatu matriks interval

$$\mathbf{A} = \langle \underline{A}, \overline{A} \rangle = \begin{bmatrix} \langle 2,10 \rangle & \langle 5,14 \rangle \\ \langle 0,7 \rangle & \langle -3,0 \rangle \end{bmatrix}$$ di mana

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \text{dan } \overline{A} = \begin{bmatrix} 10 & 14 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}.$$

Semua matriks $A = (a_{ij})$ dengan

$2 \leq a_{11} \leq 10$ $\quad$ $0 \leq a_{21} \leq 7$

$5 \leq a_{12} \leq 14$ $\quad$ $-3 \leq a_{22} \leq 0$

adalah termasuk di dalam matriks interval $\mathbf{A} = \langle \underline{A}, \overline{A} \rangle$.

Definisi operasi penjumlahan dan pergandaan matriks interval atas aljabar max-plus, sama halnya definisi operasi penjumlahan dan pergandaan pada matriks atas aljabar max-plus. Hanya saja pada matriks interval mengikuti definisi operasi max dan plus pada suatu interval yaitu

$\langle a, b \rangle \otimes \langle c, d \rangle = \langle a + c, b + d \rangle$ [3]

$\langle a, b \rangle \oplus \langle c, d \rangle = \langle \max(a, c), \max(b, d) \rangle$ [3]

dengan $a, b, c, d \in R_\varepsilon$.

Pembahasan operasi matriks interval atas aljabar max-plus, analog dengan definisi operasi matriks interval pada [4]. Dimisalkan $M_{n \times m}(R_{\max})$ adalah himpunan semua matriks interval atas aljabar max-plus berordo $n \times m$. Untuk $n, m \in N$, didefinisikan $\underline{n} = \{1, 2, \ldots, n\}$ dan $\underline{m} = \{1, 2, \ldots, m\}$.

Elemen-elemen dari matriks $\mathbf{A} = \langle \underline{A}, \overline{A} \rangle \in M_{n \times m}(R_{\max})$ dengan baris i dan kolom j, dinotasikan dengan $(\underline{a}, \overline{a})_{ij}$ atau dapat disajikan dengan $[\mathbf{A}]_{ij}$, untuk $i \in \underline{n}$, dan $j \in j(\underline{n})$.

a. Misalkan matriks $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_{n \times m}(R_{\max})$, penjumlahan matriks $\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}$, didefinisikan dengan

$$[\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}]_{ij} = (\underline{a}, \overline{a})_{ij} \oplus (\underline{b}, \overline{b})_{ij} = \langle \max(\underline{a}_{ij}, \underline{b}_{ij}), \max(\overline{a}_{ij}, \overline{b}_{ij}) \rangle$$

b. Misalkan $\mathbf{A} \in M_{n \times m}(R_{\max})$ dan $\beta \in R_\varepsilon$, pergandaan skalar β dengan matriks $\mathbf{A}$ yaitu $\beta \otimes \mathbf{A}$, didefinisikan dengan

$$[\beta \otimes \mathbf{A}]_{ij} = \beta \otimes (\underline{a}, \overline{a})_{ij} = \langle \underline{a}_{ij} + \beta, \overline{a}_{ij} + \beta \rangle$$

c. Misalkan matriks $\mathbf{A} \in M_{n \times l}(R_{\max})$ dan $\mathbf{B} \in M_{l \times m}(R_{\max})$, perkalian matriks $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$, didefinisikan dengan

$$[\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}]_{ik} = \bigoplus_{j=1}^{l} (\underline{a}, \overline{a})_{ij} \otimes (\underline{b}, \overline{b})_{ij} = \left\langle \max_{j \in \underline{l}} \{ \underline{a}_{ij} + \underline{b}_{jk} \}, \max_{j \in \underline{l}} \{ \overline{a}_{ij} + \overline{b}_{jk} \} \right\rangle$$

3. NILAI DAN VEKTOR EIGEN YANG MUNGKIN DARI MATRIKS INTERVAL

Diasumsikan bahwa semua matriks $A \in \mathbf{A} = \left\langle \underline{A}, \overline{A} \right\rangle$ adalah matriks dari digraph berbobot yang terhubung kuat dengan semua entri penyusun matriks $\underline{A}, \overline{A} \in R_{\max}^{n \times n}$ adalah berhingga, dan oleh kerenanya masing-masing $A \in \mathbf{A}$ mempunyai nilai eigen yang tunggal $\lambda(A)$.

Suatu skalar λ dinamakan nilai eigen yang mungkin dari suatu matriks interval **A**, jika skalar tersebut adalah nilai eigen dari sedikitnya satu $A \in \mathbf{A}$ [2]**.**

Teorema 1
Suatu skalar λ adalah nilai eigen yang mungkin dari suatu matriks interval **A** jika dan hanya jika $\lambda \in \left\langle \lambda(\underline{A}), \lambda(\overline{A}) \right\rangle$.

Bukti :
($\Rightarrow$)
Diketahui λ adalah nilai eigen yang mungkin dari suatu matriks interval **A.**
Sehingga, λ adalah nilai eigen dari sedikitnya satu $A \in \mathbf{A}$**.** Misalkan λ adalah nilai eigen dari suatu matriks $A \in \mathbf{A} = \left\langle \underline{A}, \overline{A} \right\rangle$.
Karena A adalah matriks dari digraph berbobot yang terhubung kuat, maka $\lambda(A) = \max\left\{ \frac{w(\rho)}{w(\rho)} ; \rho \text{ } adalah\, cycle\, dari\, G(A) \right\}$K
arena untuk setiap matriks $A \in \mathbf{A}$ mempunyai *cycle* yang sama, akan tetapi mempunyai bobot berbeda, yaitu
$w(\underline{\rho}) \leq w(\rho) \leq w(\overline{\rho})$
dengan
$\underline{\rho} =$ *cycle* di dalam digraph $G(\underline{A})$
$\rho =$ *cycle* di dalam digraph $G(A)$
$\overline{\rho} =$ *cycle* di dalam digraph $G(\overline{A})$
maka diperoleh

$$\max\left\{ \frac{w(\underline{\rho})}{l(\underline{\rho})} \right\} \leq \max\left\{ \frac{w(\rho)}{l(\rho)} \right\} \leq \max\left\{ \frac{w(\overline{\rho})}{l(\overline{\rho})} \right\}$$

$$\lambda(\underline{A}) \leq \lambda(A) \leq \lambda(\overline{A})$$

Hal ini menunjukkan bahwa $\lambda \in \left\langle \lambda(\underline{A}), \lambda(\overline{A}) \right\rangle$.

($\Leftarrow$)
Diketahui $\lambda \in \left\langle \lambda(\underline{A}), \lambda(\overline{A}) \right\rangle$. Akan dibuktikan λ adalah nilai eigen yang mungkin dari matriks **A,** yang artinya λ adalah nilai eigen dari sedikitnya satu $A \in \mathbf{A}$**.** Diambil matriks A dari digraph yang terhubung kuat dengan nilai eigen $\lambda(A) = \max\left\{ \frac{w(\rho)}{w(\rho)} \right\}$
Matriks interval $\mathbf{A} = \left\langle \underline{A}, \overline{A} \right\rangle$ mempunyai

- nilai eigen matriks batas bawah $\underline{A}$, yaitu $\lambda(\underline{A}) = \max\left\{ \frac{w(\underline{\rho})}{l(\underline{\rho})} \right\}$
- nilai eigen matriks batas atas $\overline{A}$, yaitu $\lambda(\overline{A}) = \max\left\{ \frac{w(\overline{\rho})}{l(\overline{\rho})} \right\}$

Akan ditunjukkan bahwa matriks $A \in \mathbf{A} = \left\langle \underline{A}, \overline{A} \right\rangle$.
Jika $\lambda(A) \in \left\langle \lambda(\underline{A}), \lambda(\overline{A}) \right\rangle$, ini berarti bahwa
$\lambda(\underline{A}) \leq \lambda(A) \leq \lambda(\overline{A})$
Sehingga berlaku

$$\max\left\{ \frac{w(\underline{\rho})}{l(\underline{\rho})} \right\} \leq \max\left\{ \frac{w(\rho)}{l(\rho)} \right\} \leq \max\left\{ \frac{w(\overline{\rho})}{l(\overline{\rho})} \right\}$$

Karena *cycle-cycle* dari matriks $A, \underline{A}$, dan $\overline{A}$ sama, maka berlaku
$w(\underline{\rho}) \leq w(\rho) \leq w(\overline{\rho})$
dengan
$\underline{\rho} =$ *cycle* di dalam digraph $G(\underline{A})$
$\rho =$ *cycle* di dalam digraph $G(A)$
$\overline{\rho} =$ *cycle* di dalam digraph $G(\overline{A})$
Hal ini menunjukkan bahwa $A \in \mathbf{A} = \left\langle \underline{A}, \overline{A} \right\rangle$, dengan kata lain $\lambda(A)$ adalah nilai eigen dari sedikitnya satu matriks $A \in \mathbf{A}$**.** ■

Input : suatu matriks interval **A,** dan sebuah vektor x.

1. **Begin** $y := \underline{A} \otimes x$
2. **If** $y - x$ adalah suatu vektor konstan
3. **then** x adalah suatu vektor eigen yang mungkin dari **A**, **STOP**
4. **else begin** $\lambda(x) := \max_i \{y_i - x_i\}$;
5. **for all** $i, j : a^*_{ij} = \min\{\overline{a}_{ij}, \lambda(x) + x_i - x_j\}$;
6. **if** $(A^* \otimes x) - x$ adalah suatu vektor konstan
7. **then** x adalah suatu vektor eigen yang mungkin dari **A ; STOP**
8. **else** x bukan vektor eigen yang mungkin dari **A; STOP**
9. **end**
10. **end.**

Suatu vektor $x \in R^n_{\max}$ adalah vektor eigen yang mungkin dari suatu matriks interval **A** jika terdapat $A \in \mathbf{A}$ sedemikian sehingga $A \otimes x = \lambda(A) \otimes x$ [2].

Selanjutnya, untuk menentukan matriks A yang mempunyai vektor eigen $x \in R^n_{\max}$ ini dilakukan dengan cara meningkatkan matriks batas bawah $\underline{A}$ dalam setiap koordinat sedemikian rupa sehingga tidak melebihi matriks batas atas $\overline{A}$, tetapi untuk setiap koordinat i dari $A \otimes x$ dipastikan nilainya sekurang-kurangnya $\lambda(x) \otimes x_i$ yang dapat dirumuskan dengan

$$a^*_{ij} = \min\{\overline{a}_{ij}, \lambda(x) + x_i - x_j\}.$$

Sehingga untuk menguji apakah suatu vektor x yang diberikan adalah vektor eigen dari suatu matriks interval **A**, dapat dilakukan dengan menggunakan algoritma *"possible eigenvector"* sebagai berikut :

4. NILAI DAN VEKTOR EIGEN UNIVERSAL DARI MATRIKS INTERVAL

Diasumsikan bahwa semua matriks $A \in \mathbf{A} = \langle \underline{A}, \overline{A} \rangle$ adalah matriks dari digraph berbobot yang terhubung kuat dengan semua entri penyusun matriks $\underline{A}, \overline{A} \in R^{n\times n}_{\max}$ adalah berhingga, dan oleh kerenanya masing-masing $A \in \mathbf{A}$ mempunyai nilai eigen yang tunggal $\lambda(A)$.

Suatu skalar λ dinamakan nilai eigen universal dari suatu matriks interval **A**, jika skalar tersebut adalah nilai eigen dari setiap $A \in \mathbf{A}$ [2].

Teorema 2
Suatu matriks interval **A** mempunyai suatu nilai eigen universal jika dan hanya jika $\lambda(\underline{A}) = \lambda(\overline{A})$.

Bukti :
$(\Rightarrow)$
Diketahui suatu interval **A** mempunyai suatu nilai eigen universal λ, maka λ adalah nilai eigen dari setiap $A \in$ **A.**
Karena $\underline{A}, \overline{A} \in \mathbf{A}$, maka $\lambda(\underline{A}) = \lambda$ dan $\lambda(\overline{A}) = \lambda$.
Sehingga, $\lambda(\underline{A}) = \lambda(\overline{A})$

$(\Leftarrow)$
Diketahui $\lambda(\underline{A}) = \lambda(\overline{A})$.
Misalkan $\lambda(\underline{A}) = \lambda(\overline{A}) = \lambda$, akan ditunjukkan bahwa λ adalah nilai eigen universal dari **A,** yang berarti λ adalah nilai eigen dari setiap $A \in$ **A.**
Ambil sebarang matriks $A \in \mathbf{A} = \langle \underline{A}, \overline{A} \rangle$, dengan

$\underline{\rho} =$ *cycle* di dalam digraph $G(\underline{A})$

$\rho =$ *cycle* di dalam digraph $G(A)$

$\overline{\rho} =$ *cycle* di dalam digraph $G(\overline{A})$

maka $w(\underline{\rho}) \le w(\rho) \le w(\overline{\rho})$.

Karena *cycle-cycle* dari matriks $A, \underline{A}$, dan $\overline{A}$ sama, maka

$$\frac{w(\underline{\rho})}{l(\underline{\rho})} \le \frac{w(\rho)}{l(\rho)} \le \frac{w(\overline{\rho})}{l(\overline{\rho})}$$

Akibatnya

$$\max\left\{\frac{w(\underline{\rho})}{l(\underline{\rho})}\right\} \le \max\left\{\frac{w(\rho)}{l(\rho)}\right\} \le \max\left\{\frac{w(\overline{\rho})}{l(\overline{\rho})}\right\}$$

$$\lambda(\underline{A}) \le \lambda \le \lambda(\overline{A})$$

Dengan kata lain, $\lambda \in \left\langle \lambda(\underline{A}), \lambda(\overline{A}) \right\rangle$.

Karena diketahui bahwa $\lambda(\underline{A}) = \lambda(\overline{A})$, maka $\lambda = \lambda(\underline{A}) = \lambda(\overline{A})$.

Hal ini berarti bahwa matriks interval **A** tersebut mempunyai suatu nilai eigen universal λ. ■

Selanjutnya, dalam pembahasan vektor eigen universal dibatasi hanya pada kasus $\lambda(\underline{A}) = \lambda(\overline{A})$ dan matriks interval yang diberikan mempunyai suatu nilai eigen universal sama dengan 0. Vektor eigen universal merupakan kombinasi linier atas aljabar max-plus dari himpunan vektor eigen fundamental matriks $\underline{A}$ maupun $\overline{A}$.

Teorema 3

Apabila suatu matriks interval **A** mempunyai $\lambda(\underline{A}) = \lambda(\overline{A}) = 0$ dan $\{u_1, u_2, ..., u_m\}$ adalah himpunan vektor eigen fundamental dari $\underline{A}$, maka terdapat vektor eigen universal dari **A** jika dan hanya jika sistem dua sisi

$$C \otimes y = D \otimes y$$

dengan $C_i = \overline{A} \otimes u_i$ dan $D_i = u_i$ untuk semua $i = 1, 2, ..., m$ mempunyai penyelesaian.

Bukti :

$(\Rightarrow)$

Diketahui suatu matriks interval **A** dengan $\lambda(\underline{A}) = \lambda(\overline{A}) = 0$ dan misalkan $\{u_1, u_2, ..., u_m\}$ adalah himpunan vektor eigen fundamental dari $\underline{A}$.

Akan dibuktikan sistem dua sisi $C \otimes y = D \otimes y$ mempunyai penyelesaian.

Misalkan vektor eigen universal dari **A** adalah $x \in R^n_{\max}$, maka untuk setiap $A \in \mathbf{A}$ berlaku $A \otimes x = \lambda(A) \otimes x$.

Karena vektor eigen universal merupakan kombinasi linier atas aljabar max-plus dari himpunan m vektor eigen fundamental matriks $\underline{A}$, maka

$$x = \bigoplus_{i=1}^{n} (y_i \otimes u_i)$$

Sehingga, untuk $\overline{A} \in \mathbf{A}$ dengan $\lambda(\overline{A}) = 0$, berlaku

$$\overline{A} \otimes \bigoplus_{i=1}^{m} (y_i \otimes u_i) = \bigoplus_{i=1}^{m} (y_i \otimes u_i)$$

$$\bigoplus_{i=1}^{m} \left((\overline{A} \otimes u_i) \otimes y_i \right) = \bigoplus_{i=1}^{m} (u_i \otimes y_i)$$

$$\bigoplus_{i=1}^{m} (C_i \otimes y_i) = \bigoplus_{i=1}^{m} (D_i \otimes y_i)$$

$$C \otimes y = D \otimes y$$

Jadi, $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$ adalah penyelesaian dari $C \otimes y = D \otimes y$.

$(\Leftarrow)$

Diketahui suatu matriks interval **A** dengan $\lambda(\underline{A}) = \lambda(\overline{A}) = 0$ dan misalkan $\{u_1, u_2, ..., u_m\}$ adalah himpunan vektor eigen fundamental dari $\underline{A}$.

Akan dibuktikan terdapat $x \in R^n_{\max}$ suatu vektor eigen universal dari **A.**

Misalkan $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$ adalah penyelesaian dari sistem persamaan dua-sisi $C \otimes y = D \otimes y$, sehingga,

$$\bigoplus_{i=1}^{m} (C_i \otimes y_i) = \bigoplus_{i=1}^{m} (D_i \otimes y_i)$$

$$\bigoplus_{i=1}^{m} \left((\overline{A} \otimes u_i) \otimes y_i \right) = \bigoplus_{i=1}^{m} (u_i \otimes y_i)$$

$$\overline{A} \otimes \bigoplus_{i=1}^{m} (y_i \otimes u_i) = \bigoplus_{i=1}^{m} (y_i \otimes u_i)$$

Terlihat bahwa dengan $\lambda(\overline{A}) = 0$, $x = \bigoplus_{i=1}^{n} (y_i \otimes u_i)$ adalah vektor eigen matriks $\overline{A}$.

Karena x adalah vektor eigen matriks batas $\underline{A}$ dan $\overline{A}$, maka x adalah vektor eigen semua matriks $A \in \mathbf{A}$, yang berarti x adalah vektor eigen universal dari **A**. ■

Contoh 2

Diberikan matriks interval

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \langle 0, 0 \rangle & \langle -1, 0 \rangle & \langle -2, 1 \rangle \\ \langle -3, -2 \rangle & \langle -1, -1 \rangle & \langle 0, 0 \rangle \\ \langle -4, -1 \rangle & \langle 0, 0 \rangle & \langle -4, -1 \rangle \end{bmatrix}$$

di mana $\lambda(\underline{A}) = \lambda(\overline{A}) = 0$.

Himpunan vektor eigen fundamental dari matriks $\underline{A}$ yaitu $\{(0,-3,-3), (-1,0,0)\}$.

Dibentuk matriks C dengan $C_i = \overline{A} \otimes u_i$, yaitu $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ dan matriks D dengan $D_i = u_i$, yaitu $D = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$.

Salah satu penyelesaian system persamaan dua-sisi $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \otimes y = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \otimes y$ adalah $y = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, sehingga vektor eigen universal dari matriks **A** adalah

$$x = \left(0 \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix} \right) \oplus \left(-1 \otimes \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

5. PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN DUA-SISI

Sistem persamaan linier dua-sisi atas aljabar max-plus yang berbentuk

$C \otimes y = D \otimes y$ dengan $C \geq D$ (1)

$\underline{n}$ menotasikan himpunan indeks baris $\{1,2,\ldots,n\}$ dan $\underline{m}$ himpunan indeks kolom $\{1,2,\ldots,m\}$ dari matriks C dan D.

Lemma 4

Jika terdapat baris i sedemikian sehingga $c_{ij} > d_{ij}$ untuk setiap j, maka sistem tidak mempunyai solusi.

Bukti :

Misalkan vektor y adalah solusi dari (1) dan pemaksimal dalam sisi ruas kiri dan sisi ruas kanan dari baris i masing-masing diperoleh pada kolom ke j dan l, yaitu $c_{ij} + y_j = \max_k \{c_{ik} + y_k\}$ dan $d_{il} + y_l = \max_k \{d_{ik} + y_k\}$ dengan $i \in \underline{n}$, dan $j \in \underline{m}$.

Maka akan berlaku $c_{ij} + y_j \geq c_{il} + y_l > d_{il} + y_l$.

Hasil $c_{il} + y_l > d_{il} + y_l$ kontradiksi dengan y adalah solusi dari $C \otimes y = D \otimes y$. Sehingga terbukti bahwa sistem $C \otimes y = D \otimes y$ dengan $C \geq D$ tidak mempunyai solusi. ■

Akibat

Jika sistem berbentuk (1) mempunyai penyelesaian, maka untuk setiap baris i terdapat suatu indeks j sedemikian sehingga berlaku $c_{ij} = d_{ij}$.

Bukti :

Misalkan vektor y adalah solusi dari (1).

Akan dibuktikan bahwa untuk setiap baris i terdapat suatu indeks j sedemikian sehingga berlaku $c_{ij} = d_{ij}$.

Misalkan pemaksimal dalam sisi ruas kiri dan sisi ruas kanan dari baris i masing-masing diperoleh pada kolom ke l dan j, yaitu $c_{il} + y_l = \max_k \{c_{ik} + y_k\}$ dan $d_{ij} + y_j = \max_k \{d_{ik} + y_k\}$ dengan $i \in \underline{n}$, dan $j \in \underline{m}$. Sehingga akan berlaku $c_{il} + y_l = d_{ij} + y_j$.

Dilain pihak, $c_{ij} + y_j \le c_{il} + y_l$, maka $c_{ij} + y_j \le d_{ij} + y_j$.

Karena $C \ge D$, yang berarti memenuhi $c_{ij} \ge d_{ij}$ untuk semua $i \in \underline{n}$, dan $j \in \underline{m}$, maka $c_{ij} + y_j = d_{ij} + y_j$, dengan kata lain, $c_{ij} = d_{ij}$. ■

Indeks j pada akibat diatas, dinamakan indeks kritis untuk baris i. Dalam pembahasan selanjutnya, K_i menotasikan himpunan indeks kritis untuk baris i.

Lemma 5

Untuk setiap penyelesaian y pada (1) terdapat indeks kritis pemaksimal untuk setiap baris i.

Bukti :

Andaikan y adalah penyelesaian pada (1), dan elemen pemaksimal baris i pada $C \otimes y$ dan $D \otimes y$ berturut-turut adalah $c_{ij} + y_j$ dan $d_{ik} + y_k$.

Hal ini berarti $c_{ij} + y_j = d_{ik} + y_k$, oleh karena itu $y_k = y_j + c_{ij} - d_{ik}$.

Maka untuk elemen ke k dari baris i pada $C \otimes y$ diperoleh $c_{ik} + y_k = c_{ik} + y_j + c_{ij} - d_{ik}$.

Karena $c_{ik} \ge d_{ik}$, maka berlaku $c_{ik} + y_k \ge c_{ij} + y_j$.

Akibatnya, apabila $c_{ik} - d_{ik} > 0$, maka $c_{ik} + y_k > c_{ij} + y_j$.

Sehingga terjadi kontradiksi, karena indeks j bukan pemaksimal baris i pada $C \otimes y$. Oleh karena itu, indeks k adalah indeks kritis pemaksimal untuk baris i pada $C \otimes y$. ■

Oleh karena itu, untuk mencari penyelesaian sistem persamaan dua-sisi (1) penting untuk memilih elemen pemaksimal yang sesuai dengan indeks kritis untuk setiap baris pada $C \otimes y$.

Teorema 6

Suatu sistem (1) mempunyai penyelesaian jika dan hanya jika setiap K_i tidak kosong, terdapat fungsi $j : \underline{n} \to \underline{m}$ sehingga $j(i) \in K_i$ untuk semua $i \in \underline{n}$ dan untuk setiap subset $\{i_1, i_2, ..., i_k\}$ dari $\underline{n}$, sedemikian sehingga $j(i_1), j(i_2), ..., j(i_k)$ saling berbeda,diperoleh pertidaksamaan

$$c_{i_1 j(i_1)} + c_{i_2 j(i_2)} + ... + c_{i_k j(i_k)} \ge c_{i_1 j(i_2)} + c_{i_2 j(i_3)} + ... + c_{i_k j(i_1)} \quad (2)$$

Bukti :

$(\Rightarrow)$

Misalkan y adalah solusi dari $C \otimes y = D \otimes y$

Ambil sebarang subset $\{i_1, i_2, ..., i_k\} \subseteq \underline{n}$.

Dengan lemma 5, yang menyatakan bahwa setiap baris i terdapat indeks kritis pemaksimal $C \otimes y$, maka dinotasikan satu indeks untuk setiap baris oleh $j(i_l), l = 1,2,...,k$ dan andaikan bahwa indeks kolom yang terpilih satu sama lain berbeda, maka diperoleh

$$c_{i_l j(i_l)} + y_{j(i_k)} \ge c_{i_l j(i_{l+1})} + y_{j(i_{l+1})}$$

untuk semua $l = 1,2,...,k$ dengan $k + 1 = 1$.

Apabila pertidaksamaan tersebut dijumlahkan, maka diperoleh

$$c_{i_1 j(i_1)} + c_{i_2 j(i_2)} + ... + c_{i_k j(i_k)} \ge c_{i_1 j(i_2)} + c_{i_2 j(i_3)} + ... + c_{i_k j(i_1)}$$

$(\Leftarrow)$

Andaikan bahwa ada kemungkinan untuk memilih setiap baris i suatu indeks kolom kritis $j(i)$ sedemikian sehingga memenuhi pertidaksamaan (2). Kemudian dinotasikan

$j(\underline{n}) = \{j(i); i \in \underline{n}\}$ sebagai himpunan indeks kolom dari kolom terpilih di dalam kolom j, dan dibangun C' suatu submatriks C yang dibuat dari kolom $j(\underline{n})$. Jumlah baris dengan indeks kolom terpilih di dalam kolom j, dinotasikan dengan $p(j)$. Selanjutnya, ditinjau permasalahan untuk pemilihan pasangan indeks sebagai berikut :

Memaksimalkan : $Z = \sum_{i\in\underline{n}} \sum_{j\in j(\underline{n})} c'_{ij}\, x_{ij}$

$\sum_{j\in j(\underline{n})} x_{ij} = 1$ untuk semua $i \in \underline{n}$

$\sum_{i\in\underline{n}} x_{ij} = p(j)$ untuk semua $j \in j(n)$

$x_{ij} \geq 0$ untuk semua $i \in \underline{n}$ dan $j \in j(n)$

Akan ditunjukkan bahwa salah satu penyelesaian optimal bulat yang mungkin adalah $x_{ij(i)} = 1$ untuk $i \in \underline{n}$ dan $x_{ij} = 0$ untuk yang lainnya.

Andaikan bahwa X adalah solusi optimal dan $x_{i_1 j} = 1$ untuk beberapa $i_1 \in \underline{n}$ dan $j \notin j(i_1)$. Karena kapasitas baris i_1 adalah 1, maka $x_{i_1 j(i_1)} = 0$. Selanjutnya, karena $j \in j(n)$, maka terdapat baris $i_2 \in \underline{n}$ sedemikian sehingga $j = j(i_2)$ dan $x_{i_2 j(i_2)} = 0$. Karena kapasitas baris i_2 adalah 1, maka terdapat indeks kolom $j = j(i_3)$ untuk beberapa baris i_3 sedemikian sehingga $x_{i_2 j(i_3)} = 1$, dan $x_{i_3 j(i_3)} = 0$, dan seterusnya. Dengan cara ini, diperoleh suatu *cycle* indeks baris $\{i_1, i_2, ..., i_k\}$ sedemikian sehingga $x_{i_l j(i_l)} = 0$ dan $x_{i_l j(i_{l+1})} = 1$ untuk semua $l = 1,2,...,k$ dengan $k+1 = 1$.
Didefinisikan solusi baru X' dengan $x'_{i_l j(i_l)} = 1$ dan $x'_{i_l j(i_{l+1})} = 0$ untuk semua $l = 1,2,...,k$ dengan $k+1 = 1$, dan $x_{ij} = 0$ untuk semua pasangan indeks lainnya. Kemudian, karena C' memenuhi pertidaksamaan (2), nilai

$$\sum_{i\in\underline{n}} \sum_{j\in j(\underline{n})} c'_{ij}\, x'_{ij} > \sum_{i\in\underline{n}} \sum_{j\in j(\underline{n})} c'_{ij}\, x_{ij} ,$$

sehinggga diperoleh solusi permasalahan diatas dengan $x_{ij} = 1$ jika hanya jika $j = j(i)$ untuk $i \in \underline{n}$ dan $x_{ij} = 0$ untuk yang lainnya.

Sekarang, dibentuk dual dari masalah diatas sebagai berikut :

Meminimalkan:
$Z_d = \sum_{i\in\underline{n}} u_i + \sum_{j\in j(\underline{n})} p(j) v_j$
$u_i + v_j \geq c'_{ij}$ untuk semua $i \in \underline{n}$, dan $j \in j(n)$.

Definisikan vektor y yang dinyatakan sebagai berikut :

$$y_j = \begin{cases} -\infty & ;\text{untuk } j \notin j(\underline{n}) \\ -v_j & ;\text{untuk } j \in j(\underline{n}) \end{cases}$$

adalah suatu solusi optimal dari (1).

Karena pada setiap baris i dapat dipilih suatu indeks kolom kritis $j(i)$, maka diperoleh $c_{ij(i)} + y_{j(i)} = d_{ij(i)} + y_{j(i)}$
Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa untuk semua kolom lain l , memenuhi $c_{il} + y_l \leq c_{ij(i)} + y_{j(i)}$.
Untuk $l \notin j(\underline{n})$ pertidaksamaan ini trivial, dan untuk kolom-kolom dari $j(n)$ maka $c_{ij} = c'_{ij}$. Karena pemilihan entri-entri $(i, j(i))$ bersesuaian dengan elemen tak nol dari solusi permasalahan diatas, maka berlaku
$u_i = c_{ij(i)} - v_{j(i)}$, dan untuk semua entri yang lain $v_l \geq c_{il} - u_i$ [7]. Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} c_{il} + y_l &= c_{il} - v_l \\ &\leq c_{il} - c_{il} + u_i = c_{ij(i)} - v_{j(i)} = c_{ij(i)} + y_{j(i)} \end{aligned}$$

Dari sini terlihat bahwa vektor y mempunyai indeks kritis pemaksimal untuk setiap baris i yaitu $j(i)$.
Sehingga vektor y adalah penyelesaian dari persamaan (1). ■

Contoh 3

Diberikan matriks $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 6 & 3 & 9 & 4 \\ 7 & 3 & 8 & 0 \end{bmatrix}$ dan $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 9 & 2 \\ 7 & 3 & 7 & 0 \end{bmatrix}$.

Akan dicari penyelesaian sistem persamaan dua-sisi $C \otimes y = D \otimes y$.

Matriks C mempunyai entri-entri kritis yang ditandai sebagai berikut :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \hat{4} & 8 \\ 6 & \hat{3} & \hat{9} & 4 \\ \hat{7} & \hat{3} & 8 & \hat{0} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, dipilih entri-entri c_{13}, c_{23}, c_{31} yang memenuhi (5.2). Dibentuk sumatriks C dari kolom-kolom terpilih yaitu

$$C' = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 9 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Kapasitas setiap baris adalah 1, kapasitas kolom ke-1 adalah 1, dan kapasitas kolom ke-2 adalah 2.

Sehingga, diperoleh permasalahan pemilihan indeks sebagai berikut :

Memaksimalkan : $Z = \sum_{i \in \underline{n}} \sum_{j \in j(\underline{n})} c'_{ij} \, x_{ij}$

Kendala :
$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} &= 1 \\ x_{21} + x_{22} &= 1 \\ x_{31} + x_{32} &= 1 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 2 \end{aligned}$$

$x_{ij} \geq 0$ untuk semua $i \in \underline{n}$ dan $j \in j(n)$

Kemudian, dibentuk permasalahan dual dari masalah pemilihan indeks diatas sebagai berikut :

Meminimalkan : $Z_d = u_1 + u_2 + u_3 + v_1 + 2v_2$

Kendala :
$$\begin{aligned} &u_1 + v_1 \geq 1 && u_2 + v_2 \geq 9 \\ &u_1 + v_2 \geq 4 && u_3 + v_1 \geq 7 \\ &u_2 + v_1 \geq 6 && u_3 + v_2 \geq 8 \end{aligned}$$

Vektor y yang dinyatakan dengan $y_j = \begin{cases} -\infty & ;\text{untuk } j \notin j(\underline{n}) \\ -v_j & ;\text{untuk } j \in j(\underline{n}) \end{cases}$ adalah penyelesaian dari sistem persamaan dua-sisi diatas.

Nilai u_i dan v_j yang memenuhi :
$$\begin{aligned} &u_1 + v_1 \geq 1 && u_2 + v_2 = 9 \\ &u_1 + v_2 = 4 && u_3 + v_1 = 7 \\ &u_2 + v_1 \geq 6 && u_3 + v_2 \geq 8 \end{aligned}$$

adalah solusi dari permasalahan dual diatas.

Dengan mengambil nilai $v_2 = 1$, maka dapat diperoleh salah satu kemungkinan solusi dari permasalahan diatas yaitu $u_1 = 3, u_2 = 8, u_3 = 7, v_1 = 0, v_2 = 1$.

Sehingga diperoleh salah satu penyelesaian dari sistem dua-sisi diatas yaitu $y = \begin{bmatrix} 0 \\ -\infty \\ -1 \\ -\infty \end{bmatrix}$

6. PENUTUP

Berdasarkan uraian mengenai nilai dan vektor eigen matriks interval atas aljabar max-plus diatas dapat diperoleh beberapa hal sebagai berikut :

a. Nilai eigen yang mungkin dari suatu matrik interval $\boldsymbol{A}$ berada pada interval tertutup nilai eigen matriks batasnya.
b. Algoritma *"possible eigenvector"* dapat digunakan untuk menguji suatu vektor x sebagai vektor eigen yang mungkin dari suatu matrik interval $\boldsymbol{A}$.
c. Matriks interval $\boldsymbol{A}$ mempunyai nilai eigen universal apabila nilai eigen matriks batasnya sama.
d. Vektor eigen universal matriks interval $\boldsymbol{A}$ dengan $\lambda = 0$ dapat dicari dengan menyelesaikan suatu sistem persamaan dua-sisi.

Selanjutnya, dapat dikembangkan suatu metode bagaimana mencari vektor eigen universal matriks interval yang bersesuaian dengan nilai eigen universal $\lambda \neq 0$.

7. DAFTAR PUSTAKA

[1] Baccelli, Francois., dkk. (1992), *Synchronization and Linearity, An Algebra for Discrete Event Systems.* Wiley, Chichester.

[2] Cechlarova, K. (2003), *Eigenvectors of Interval Matrices over Max-Plus Algebra*, Slovakia.

[3] Chiao, Kuo-Ping. (1999), *Inclusion Monotonic Property of Courant-Fischer Minimax Characterization on Interval Eigenproblems for Symmetric Interval Matrices.* Alethia University.

[4] Gioia, Federica dan Carlo N. Lauro. (2006), *Principal Component Analysis on Interval Data*, Universita degli Studi di Napoli, **21**(2) : 3 – 5.

[5] Heidergott, Bernd. (1998), *Max Plus Algebra and Queues*, Vrije Universiteit, Amsterdam.

[6] Kandasamy, W. B. Vasantha. (2006), *Fuzzy Interval Matrices, Neutrosophic Interval Matrices and Their Aplications*, Florentin Smarandache, Phoenix, Arizona.

[7] Supranto, Johanes. (2006), *Riset Operasi untuk Pengambilan Keputusan*, UIP, Yogyakarta.